

PWM 型开关电容 DC-DC 变换器的 非线性动力学行为研究

张立森¹, 王立志^{1,2}

(1. 空军工程大学理学院, 陕西西安 710051; 2. 西安理工大学电子工程系, 陕西西安 710048)

摘要: 建立了 PWM 型二阶开关电容 DG DC 变换器的二维离散映射模型, 用非线性动力学理论分析了映射模型定点的稳定情况. 以电压反馈系数为参数, 通过数值计算描绘了系统动态演化的分岔图和最大 Lyapunov 指数变化曲线. 以二阶串并电容组合开关电容 DG DC 变换器为例, 用 PSPICE 软件对其进行模拟仿真, 得到了变换器的混沌吸引子. 理论分析、数值计算和模拟仿真保持了一致.

关键词: 开关电容 DG-DC 变换器; 二维离散映射; 分岔; 混沌; Lyapunov 指数

中图分类号: TM 13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 02-0266-05

Study on Nonlinear Dynamics Behavior in PWM Switched-Capacitor DC-DC Converter

ZHANG Li-sen¹, WANG Li-zhi^{1,2}

(1. Institute of Science, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China;

2. Department of Electronic Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi, 710048, China)

Abstract: A two-dimensional discrete time map for pulse width modulated second-order switched capacitor DG DC converter is derived. The stability at fixed point of the map is analyzed under nonlinear dynamics theory. The bifurcation diagram and largest Lyapunov exponent graph with the voltage feedback factor as parameter are obtained through numerical computation. Taking second-order switched capacitor DG-DC converter as an example, we find a chaotic attractor in the converter by simulating the circuit with PSPICE program. The results from theoretical analysis, numerical computation and analog simulation coincide with each other well.

Key words: switched capacitor DG-DC converter; two-dimensional discrete-time map; bifurcation, chaos; Lyapunov exponent

1 引言

开关电容 DG-DC 变换器是近年来研究的一种新型功率变换器^[1~6], 它不含磁性元件, 具有拓扑结构简单、尺寸小、电磁干扰低和转换效率高等优点, 十分适合于便携式电子产品的电源设计, 尤其是在目前较为流行的 SOC(System on a Chip, 片上系统) 内核供电电源中很有吸引力. 开关电容 DG-DC 变换器含有开关元件, 是一种强非线性系统. 目前对这种变换器的分析手段主要有等效电量关系法^[1]、状态空间平均法^[2]等, 这些方法适用于变换器在开环状态下的小信号线性化近似分析. 然而, 实际应用中的变换器一定是工作在有反馈的非线性闭环系统, 采用以上方法就难以分析系统运行的动态演化过程和稳定情况, 反映变换器工作的物理本质. 所以对开关电容 DC-DC 变换器这种强非线性系统, 运用非

线性动力学的理论、方法对其闭环系统中复杂的非线性动力学行为进行深入研究就显得很有必要. 国内外一些学者自上个世纪 90 年代开始, 对传统的含电感变换器中的非线性现象进行了研究, 提出了一些有效可行的建模方法和分析手段, 取得了大量有意义的成果^[7~10]. 但是, 对开关电容 DC-DC 变换器非线性动力学行为的研究却鲜有报道.

本文以典型的 PWM(Pulse Width Modulation, 脉冲宽度调制) 型二阶串并电容组合开关电容 DG-DC 变换器为研究对象, 用数学方法推导了其二维频闪映射方程. 在此基础上, 运用理论分析、数值计算和模拟仿真的手段, 研究了电压反馈系数变化时, 系统出现的分岔和混沌等非线性动力学行为, 从而进一步认识开关电容 DG-DC 变换器的工作机制和非线性动力学特征.

2 PWM 型开关电容 DC-DC 变换器的动力学建模

图 1 所示为典型 PWM 型开关电容 DC-DC 变换器的电路原理图(注:图中 C_1 、 C_2 的等效串联电阻未画出). 为了能得到开关占空比的显式表达式, 变换器反馈控制回路采用示意框图的形式表示^[7]. 图中 S_1 、 S_2 为功率开关, D_1 、 D_2 、 D_3 为二极管, E 为输入电压, v_1 、 v_2 、 v_o 分别为电容 C_1 、 C_2 、 C_o 上的电压, D 是开环稳态运行时开关 S_1 的导通比, k 为反馈系数($k > 0$), X 为电压反馈控制的参考电压.

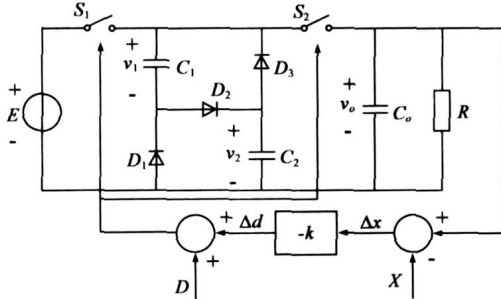


图 1 PWM 型开关电容 DC-DC 变换器电路原理图

在一个工作周期 T 中, 电路有两种工作状态: 在状态 I, S_1 导通, S_2 截止, C_1 和 C_2 串联连接, 电源 E 向 C_1 、 C_2 串联充电, C_o 放电提供负载电流; 在状态 II, S_1 截止, S_2 导通, C_1 和 C_2 并联连接, 通过 S_2 向 C_o 补充电量.

设 C_1 和 C_2 、 D_1 、 D_2 和 D_3 分别为参数相同的电容器和二极管, 则由电路的对称性有 $r_1 = r_2 = r$, 并令 $C_1 = C_2 = C$, 其等效串联电阻为 $r_1 = r_2 = r$, C_o 的等效串联电阻与负载相比可忽略不计, S_1 、 S_2 的导通电阻为 r_{s1} 、 r_{s2} , 二极管的导通压降为 V_d . 设状态向量 $x = [v \ v_o]^T$, $b = [E \ V_d]^T$, 开关动作时刻依次为 t_n 、 t'_n 、 $t_{n+1} = t_n + T$, 定义 $\xi_1 = [t_n, t'_n]$, $\xi_2 = [t'_n, t_{n+1}]$, 则在各时间区间电路的状态方程分别为:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 b & , t \in \xi_1 \\ \dot{x} = A_2 x + B_2 b & , t \in \xi_2 \end{cases} \quad (1)$$

状态矩阵 A_1 、 A_2 和输入矩阵 B_1 、 B_2 分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-2}{C(2r+r_{s1})} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C_o R} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(2r+r_{s1})} & \frac{-1}{C(2r+r_{s1})} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C(r+2r_{s2})} & \frac{1}{C(r+2r_{s2})} \\ \frac{2}{C_o(r+2r_{s2})} & \frac{-1}{C_o R} - \frac{2}{C_o(r+2r_{s2})} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C(r+2r_{s2})} \\ 0 & \frac{-2}{C_o(r+2r_{s2})} \end{bmatrix}$$

令 $x(n) = x(t_n) = [v(n) \ v_o(n)]^T$, $\tau_1 = t'_n - t_n = d_n T$, $\tau_2 = t_{n+1} - t'_n = (1 - d_n)T$. d_n 为第 n 个周期开关 S_1 的占空比, 根据图 1 有

$$d_n = \begin{cases} 0, & d_n < 0 \\ 1, & d_n > 1 \\ D - k[v_o(n) - X], & 0 \leq d_n \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

则在 $[nT, (n+1)T]$ 内解式(1), 并运用矩阵函数的微积分性质可得

$$x(n+1) = e^{\tau_2 A_2} e^{\tau_1 A_1} x(n) + e^{\tau_2 A_2} (e^{\tau_1 A_1} - I) A_1^{-1} B_1 b + (e^{\tau_2 A_2} - I) A_2^{-1} B_2 b \quad (3)$$

其中 I 为二阶单位矩阵. 运用 Hamilton Cayley 定理^[8], 采用矩阵函数的待定系数法可求得

$$e^{\tau_1 A_1} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{2g_1 \tau_1}{C}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2g_1 \tau_1}{C}} \end{bmatrix}$$

$$e^{\tau_2 A_2} = \begin{bmatrix} a_0(\tau_2) - a_1(\tau_2) \frac{g_2}{C} & a_1(\tau_1) \frac{g_2}{C} \\ a_1(\tau_2) \frac{2g_2}{C_o} & a_0(\tau_2) - a_1(\tau_2) \left[\frac{1}{C_o R} + \frac{2g_2}{C_o} \right] \end{bmatrix}$$

其中, $g_1 = 1/(2r + r_{s1})$, $g_2 = 1/(r + 2r_{s2})$, $a_0(t)$ 、 $a_1(t)$ 的表达式如下:

$$\begin{cases} a_0(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\beta} \right] e^{\frac{\beta-\alpha}{2}t} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} \right] e^{-\frac{\beta-\alpha}{2}t} \\ a_1(t) = \frac{1}{\beta} \left[e^{\frac{\beta-\alpha}{2}t} - e^{-\frac{\beta-\alpha}{2}t} \right] \end{cases} \quad (4)$$

其中 α 、 β 的表达式为

$$\begin{cases} \alpha = \frac{g_2}{C} + \frac{2g_2}{C_o} + \frac{1}{C_o R} \\ \beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{4g_2}{CC_o R}} \end{cases} \quad (5)$$

将以上各式代入式(3), 就得到了 PWM 型二阶串并电容组合开关电容 DC-DC 变换器的二维离散映射方程, 列写如下:

$$\begin{cases} v(n+1) = \left[a_0(\tau_2) - a_1(\tau_2) \frac{g_2}{C} \right] \left[e^{-\frac{2g_1 \tau_1}{C}} \cdot v(n) + \frac{V_d - E}{2} \cdot e^{-\frac{2g_1 \tau_1}{C}} - \frac{3V_d - E}{2} \right] \\ \quad + a_1(\tau_2) \cdot \frac{g_2}{C} \cdot e^{-\frac{\tau_1}{C R}} \cdot v_o(n) + V_d \\ v_o(n+1) = a_1(\tau_2) \cdot \frac{2g_2}{C_o} \left[e^{-\frac{2g_1 \tau_1}{C}} \cdot v(n) + \frac{V_d - E}{2} \cdot e^{-\frac{2g_1 \tau_1}{C}} - \frac{3V_d - E}{2} \right] \\ \quad + \left[a_0(\tau_2) - a_1(\tau_2) \left[\frac{1}{C_o R} + \frac{2g_2}{C_o} \right] \right] e^{-\frac{\tau_1}{C R}} \cdot v_o(n) \end{cases} \quad (6)$$

3 二维离散映射的定点及其稳定性分析

离散映射定点的性质对分析系统的动力性质具有十分重要的意义,因此我们首先用解析的方法研究开关电容变换器二维离散映射中的定点.对于离散映射方程(6),其定点 x_f 可通过求解下列方程组得到

$$\begin{cases} v(n+1) = v(n) \\ v_o(n+1) = v_o(n) = X \end{cases} \quad (7)$$

映射在定点处的 Jacobian 矩阵为^[9]:

$$J(x_f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v(n+1)}{\partial v(n)} & \frac{\partial v(n+1)}{\partial v_o(n)} \\ \frac{\partial v_o(n+1)}{\partial v(n)} & \frac{\partial v_o(n+1)}{\partial v_o(n)} \end{bmatrix}_{x_f} \quad (8)$$

令 λ_1, λ_2 是 $J(x_f)$ 的特征值,则定点稳定条件为: $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$. 且当有一个特征值为 -1 时,系统开始出现分岔.

下面以一个具体的例子来计算系统的定点及其稳定范围.对图 1 中的各电路参数设置如下: $E = 15V, V_d = 0.3V, X = 5V, r_{s1} = 0.3\Omega, r_{s2} = 0.085\Omega, r = 0.1\Omega, R = 20\Omega, C_1 = C_2 = 47\mu F, C_0 = 100\mu F, T = 100\mu s$. 由式(7)可解得

$$\begin{cases} x_f = [5.3164 \quad 5.000]^T \\ D = 0.0167 \end{cases} \quad (9)$$

注意:求解时应将稳定运行的开关导通比 D 当作未知量,因为 D 由系统的稳态工作点所决定.映射在定点 x_f 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(x_f) = \begin{bmatrix} 0.4112 & -7.1206k + 0.5022 \\ 0.4099 & -7.0974k + 0.5006 \end{bmatrix} \quad (10)$$

通过计算其特征值,再利用上述定点稳定条件可得变换器稳定运行的范围为

$$0 < k < 0.2694 \quad (11)$$

当 $k = 0.2694$ 时, Jacobian 矩阵有一个特征值为 -1 , 系统处于稳定临界状态,当 $k > 0.2694$ 时,系统进入分岔, $k = 0.2694$ 是系统的分岔点.

4 开关电容 DC-DC 变换器闭环系统动态演化过程

上述理论分析表明:在开关电容 DC-DC 变换器闭环系统中,电压反馈系数 k 的取值影响着系统运行的稳定性.为验证理论分析结果,进一步认识变换器随 k 值变化的动态演化过程,下面以电压反馈系数 k 为参数,通过对式(6)

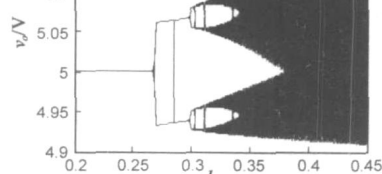


图 2 电压 v_o 随反馈系数变化的分岔图

进行迭代计算,得到图 2 所示 v_o 随 k 变化的分岔图.

图 2 直观反映了系统运行状态的演化过程,展示了开关电容变换器中存在的分岔、混沌等非线性动力学行为.当 $0 < k < 0.27$ 时,系统运行在稳定的周期不动点(定点); $k \approx 0.27$ 时,迭代计算结果出现跳跃情况,曲线分为两支,系统开始出现倍周期分岔,这与前面的理论分析结果一致;将分岔图局部放大,可以观察到 $k \approx 0.295$ 时,系统由周期 2 变为周期 4,然后在很窄的范围内分岔迅速加快;直到 $k \approx 0.303$ 时,分岔周期已经非常大,随机程度很高,系统开始进入混沌状态.

5 系统的最大 Lyapunov 指数计算

Lyapunov 指数可以表征系统运动特征:所有 Lyapunov 指数取值的集合(Lyapunov 指数谱)决定系统在相空间轨线(吸引子)的性质,如果计算得知系统至少有一个正的 Lyapunov 指数,则可肯定系统作混沌运动^[11]. m 阶离散系统的 Lyapunov 指数(用 LE 表示)定义如下^[9]:

$$LE_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |\lambda_i|, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

其中 λ_i 为每次迭代的变换器状态变量值 x 对应的 Jacobian 矩阵的特征值, n 为迭代次数.最大 Lyapunov 指数(用 LLE 表示)为:

$$LLE = \max (LE_1, LE_2, \dots, LE_m).$$

图 3

是系统二维映射(6)在不同 k 值时,用计算机计算得到的最大 Lyapunov 指数变化曲线.

计算过程中记录了当 $k = 0.303$ 时, LLE 由负值变为正值,系统开始进入混沌,之后随着 k 值增大, LLE 持续为正值,系统继续运行在混沌状态,这与前面的分岔图保持了一致.同时,计算结果还显示系统的最小 Lyapunov 指数始终为负数,因此变换器的两个状态变量在相平面上的轨线将收缩成为吸引子^[11],这在下面的 PSPICE 模拟仿真结果中可以证实.

6 PSPICE 模拟仿真

为验证上述理论分析和数值计算的结果,下面用 PSPICE 软件,对一个具体的开关电容 DC-DC 变换器的电路进行模拟分析.电路的主要部份如图 4 所示,反馈控制回路参考了文献[10]的做法.

图中 V_{ref} 为电压反馈控制的参考电压,对应图 1

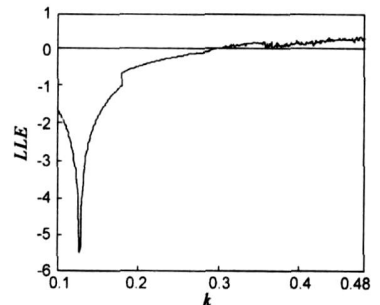


图 3 二维离散映射的最大 Lyapunov 指数

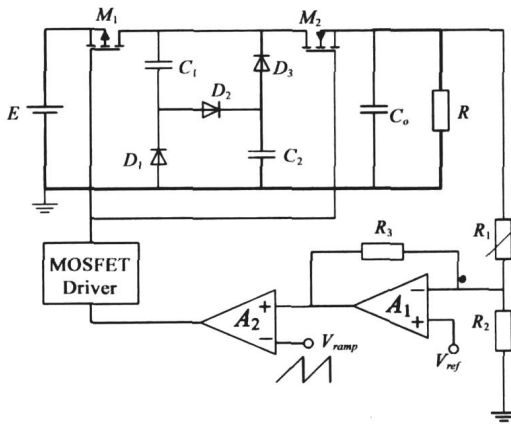


图 4 PWM 型二阶开关电容 DC-DC 变换器电路图中的 X , V_{ramp} 为锯齿波, 其电压表达式为 $V_{ramp} = V_H + (V_H - V_L)(t \bmod T)$, V_H 、 V_L 分别为锯齿波的波峰和波谷电压值. 将图 4 和图 1 对照可得如下关系

$$\begin{cases} k = \frac{R_3}{(V_H - V_L)R_1} \\ D = \frac{(1 + R_3/R_2)V_{ref} - V_L}{V_H - V_L} \end{cases} \quad (13)$$

反馈电路部份电路各参数设置如下: $V_H = 9V$, $V_L = 5V$, $V_{ref} = X = 5V$, $R_2 = 100k\Omega$, $R_3 = 1.336k\Omega$, R_1 是可调电阻, 用于改变反馈系数 k 的值. 用 PSPICE 对图 4 进行模拟仿真, 得到 k 取不同值时, 变换器状态变量的时域波形和相图. 限于篇幅, 下面仅列出了系统运行在周期 1、周期 2 和混沌状态的仿真结果, 分别如图 5~ 7 所示.

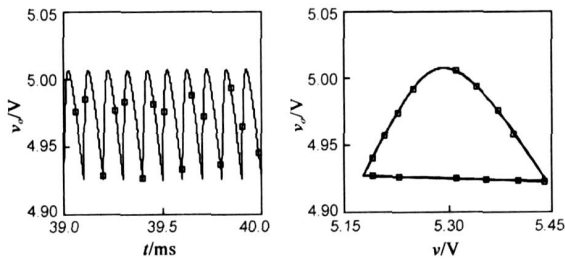


图 5 $k=0.2$ 时, 变换器运行在周期 1 的时域波形和相图

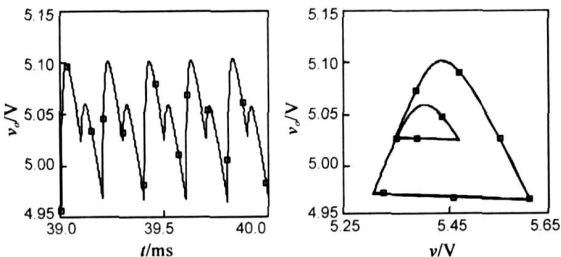


图 6 $k=0.269$ 时, 变换器运行在周期 2 的时域波形和相图

由以上图形可以看出, PSPICE 仿真结果与前面的分析保持了一致. 图 7 展现了二阶 PWM 型开关电容 DC-DC 变换器闭环系统中存在的混沌吸引子, 该吸引子的形状、结构与在传统变换器中得到的吸引子不同, 这是由于开关电容变换器工作的物理机制不同于传统

直流变换器.

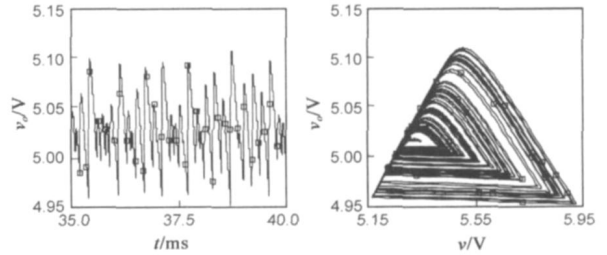


图 7 $k=0.40$ 时, 变换器运行在混沌状态的时域波形和相图

7 结论

开关电容变换器是一种有着广泛应用前景的变换器. 本文以典型二阶串并电容组合开关电容 DC-DC 变换器为例, 经过严格的数学推导, 建立了其闭环系统的二维离散映射模型. 理论分析、数值计算和模拟仿真结果均表明开关电容变换器中存在着分岔、混沌等非线性动力学行为. 所用的分析方法具有一般性, 可推广到其他不同拓扑结构的开关电容功率变换器非线性动力学行为分析中.

参考文献:

- [1] 刘健, 陈治明, 钟彦儒. 开关电容 DC-DC 变换器的分析 [J]. 电子学报, 1997, 25(2): 88-90.
Liu Jian, Chen Zhiming, Zhong Yanru. Analysis of switched capacitor DC-DC converters [J]. Acta Electronica Sinica, 1997, 25(2): 88-90. (in Chinese)
- [2] S V Cheong, et al. Inductorless DG to DC converters with high power density [J]. IEEE Trans Indus Elec, 1994, 41(2): 208-215.
- [3] Liu Jian, Chen Zhiming, Du Zhong. A new design on switched capacitor DC-DC converters for pocket computer systems [J]. IEEE Trans on Industry Electronics, 1998, 45(2): 228-235.
- [4] Sui Xiaohong, Chen Zhiming, et al. Improving Characteristics of Integrated Switched-Capacitor DC-DC Converter by CMOS Technology [J]. Chinese Journal of Semiconductors, 2003, 24(12): 1239-1243.
- [5] F L Luo, H Ye. Positive output multiple lift push-pull switched-capacitor converters [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2004, 51(3): 594-602.
- [6] 刘健, 陈治明. 开关电容 DC-DC 变换器的最佳控制方法 [J]. 电子学报, 1998, 26(8): 129-131.
Liu Jian, Chen Zhiming. Optimum regulation on switched capacitor DC-DC converters [J]. Acta Electronica Sinica, 1998, 26(8): 129-131. (in Chinese)
- [7] Tse C K. Flip bifurcation and chaos in three state boost switching regulators [J]. IEEE Trans Circuit and Syst 1, 1994, 41(1): 16-23.
- [8] 曲颖, 张波. 电压控制型 BUCK 变换器 DCM 的精确离散

模型及分叉稳定性分析[J]. 电子学报, 2002, 30(8): 1253-1256.

Qu Ying, Zhang Bo. The precise mathematical discrete model of buck converter in DCM and its analysis for bifurcation stability[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(8): 1253-1256. (in Chinese)

[9] 张波, 李萍, 齐群. DC-DC 变换器分叉和混沌现象的建模和分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(11): 81-

86.

Zhang Bo, Li Ping, Qi Qun. Methods for analyzing and modeling bifurcations and chaos in DC-DC converter[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(11): 81-86. (in Chinese)

[10] C K Tse, M di Bernardo. Complex behavior in switching power converters[J]. Proc IEEE, 2002, 90(5): 768-781.

[11] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004, 403-408.

作者简介:



张立森 男, 1982 年生于湖北鄂州, 空军工程大学理学院博士生. 研究方向为嵌入式开关功率变换器及其非线性动力学行为.

E-mail: ls.zhang@yahoo.com.cn



王立志 男, 1962 年生于陕西商洛市, 博士, 教授. 主要从事模拟与数字电路、功率集成电路的教学与科研工作.